

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות - תרגיל בית 2

טורי פורייה

1. תהי $f(x) = \sum_{n=1}^m e^{2inx}$, כאשר $x \in \mathbb{R}$ ו- $m \in \mathbb{N}$.

(א) חשבו את $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$.

(ב) הוכיחו את אי השיוון $\int_0^{4\pi} |f(x)| dx \leq 4\pi\sqrt{m}$.

2. לכל $0 < p \leq \pi$ נגדיר את הפונקציה f_p ,

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{p} & ; |x| \leq p \\ 0 & ; p < |x| \leq \pi \end{cases}$$

ויהי

$$f_p(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

הטור פורייה של f_p בקטע $[-\pi, \pi]$.

(א) חשבו את המקדמים a_n ו- b_n .

(ב) לכל $0 < p \leq \pi$ נגדיר גם את הפונקציה

$$g_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx$$

כאשר a_n ו- b_n הם מקדמי הטור פורייה של f_p .
למה שווה g_p ? (תארו את g_p בצורה אנליטית) שרטטו סקיצה של הגרף של g_p .

(ג) חשבו את הסכומים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos np)^2}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1 - \cos np)}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos np}{n^2}$$

3. נתונה פונקציה $f \in E[-\pi, \pi]$ ויהא $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ הטור פורייה של f בקטע $[-\pi, \pi]$. נתון ש-

$$|c_n| \leq \frac{K}{n^3} \quad \text{לכל } n \in \mathbb{N} \text{ וכאשר } K \in \mathbb{R} \text{ קבוע ממשי.}$$

הוכיחו של- f יש נגזרת ראשונה, הטור של f מתכנס במ"ש וגם טור הנגזרות של f מתכנס.